

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی و فیزیک	سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳		سال سوم آموزش متوسطه	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴	

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:	۱/۵
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	
۲	اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:	۱
	$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$	
۳	می‌دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است ثابت کنید عدد $1 + \sqrt{3}$ گنگ است. (برهان خلف)	۱/۲۵
۴	از ۸۰۰ نفر دانش آموزان یک مدرسه حداقل چند دانش آموز در یک روز سال متولد شده اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید.)	۱
۵	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم حاصل همواره عددی فرد است.	۰/۷۵
۶	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۱/۷۵
	$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	
۷	اگر $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -1 \leq x \leq 1\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } x^2 \leq 3\}$ ، عضوهای مجموعه‌ی $A \times B - A^2$ را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.	۱/۵
۸	رابطه‌ی R روی \mathbb{R}^2 به صورت $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^2 - t^2 = z^2 - y^2$ به رو تعریف شده است. الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-2, 3)]$ را مشخص کنید.	۱/۷۵
۹	نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, y \leq 1\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۰/۵
« ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم »		

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴		اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	

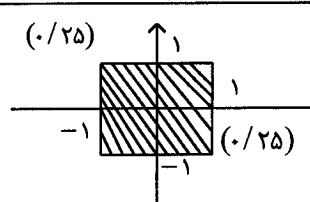
ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱۰	سکه ای را پرتاب می کنیم اگر رو بیاید آنگاه تاس را می ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می کنیم مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه ای این پیشامد. ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید. ج) پیشامد B به طوری که حداقل دوبار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد. د) $A \cap B'$	۲
۱۱	۳ لامپ را از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشد انتخاب می کنیم تعیین کنید احتمال اینکه: الف) هیچکدام معیوب نباشند. ب) فقط یکی از لامپ ها معیوب باشد.	۱
۱۲	تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید.	۱/۵
۱۳	نقطه (x, y) را درون دایره $S = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه نقطه ای مورد نظر در $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ باشد را تعیین کنید.	۱/۵
۱۴	سکه سالمی را ۱۰ بار پرتاب می کنیم، مطلوب است احتمال آن که ۷ بار رو بیاید.	۰/۵
۱۵	برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	۱
۱۶	اگر $P(A \cup B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشند مطلوب است محاسبه: الف) $P(B)$ ب) $P(B - A)$ « موفق باشید »	۱/۵
	جمع نمره	۲۰

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح

۱	$P(1): \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (0/25) \quad P(K): \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^K} = 1 - \frac{1}{2^K} \quad (0/25)$ $P(K+1): \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{1}{2^{K+1}} \quad (0/5)$ $1 - \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^{K+1}} = 1 + \frac{-2+1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{1}{2^{K+1}} \quad (0/25)$
۲	$x^2 + y^2 \geq 2(x+y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 - 2y + 1 \geq 0 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25) (0/25)</p> <p style="text-align: right;">همواره برقرار است.</p>
۳	<p>از برهان خلف استفاده می کنیم پس اگر $1 + \sqrt{3}$ اصم نباشد آنگاه گویا ست: (0/25)</p> $\begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{cases} \quad 1 + \sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad (0/25) \quad \sqrt{3} = \frac{a}{b} - 1 \quad (0/25) \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a-b}{b} \quad (0/25) \quad \sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">تناقض (0/25)</p>
۴	<p>هر سال ۳۶۵ روز است اگر دانش آموزان را به منزله کبوتر و روزهای سال را به منزله لانه کبوتر در نظر بگیریم ۳۶۵/۸۰۰ طبق اصل لانه کبوتر، (0/25)</p> <p>حداقل ۳ دانش آموز در یک روز سال متولد شده اند. (0/5)</p> $800 \overline{) 365} \quad (0/25) \quad 2+1=3$
۵	$\forall (2k) + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 1 = 2 \left(\frac{2k + 2k'}{2} \right) + 1 = 2q + 1 \quad k, k' \in \mathbb{Z}$ <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25)</p>
۶	<p>اول طرف $(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') = [(A \cup B) \cap B'] \cap C'$ (0/25)</p> <p>دوم طرف $[(A \cap B') \cup (B \cap B')] \cap C' = [(A \cap B') \cup \emptyset] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$ (0/25)</p>
۷	$A = \left\{ \frac{1}{4}, 1, 4 \right\} \quad (0/25) \quad B = \{-1, 0, 1\} \quad (0/25)$ $A \times B = \left\{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \right\} \quad A^c = \left\{ (x, y) \mid x \in A, y \in A \right\}$ $A \times B = \left\{ \left(\frac{1}{4}, -1\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, 1\right), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (4, -1), (4, 0), (4, 1) \right\} \quad (0/25)$ $A^c = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 1\right), \left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(1, \frac{1}{4}\right), (1, 1), (1, 4), \left(4, \frac{1}{4}\right), (4, 1), (4, 4) \right\} \quad (0/25)$ $A \times B - A^c = \left\{ \left(\frac{1}{4}, -1\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right), (1, -1), (1, 0), (4, -1), (4, 0) \right\} \quad (0/25)$ <p style="text-align: right;">رسم شکل (0/25)</p>
«ادامه در صفحه ی دوم»	

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳	سال سوم آموزش متوسطه
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴
راهنمای تصحیح	
	ردیف

<p>الف) $(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^r - t^r = z^r - y^r$</p> <p>$(x, y)R(x, y) \Leftrightarrow x^r - y^r = x^r - y^r \quad (./25) \quad (1)$</p> <p>$\begin{cases} (x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^r - t^r = z^r - y^r \\ (z, t)R(x, y) \Leftrightarrow z^r - y^r = x^r - t^r \end{cases} \quad (./5) \quad (2)$</p> <p>$(x, y)R(z, t) \text{ و } (z, t)R(m, n) \Rightarrow (x, y)R(m, n)$</p> <p>$\begin{cases} x^r - t^r = z^r - y^r \\ z^r - n^r = m^r - t^r \end{cases} \quad \text{طرفین را جمع می کنیم} \quad x^r - t^r + z^r - n^r = z^r - y^r + m^r - t^r$</p> <p>$\Rightarrow x^r - n^r = m^r - y^r \quad (./5) \quad (3)$</p> <p>از (1) و (2) و (3) نتیجه می گیریم R یک رابطه‌ی هم ارزی است.</p> <p>ب) $[(-2, 3)] = \{(x, y) \mid (x, y)R(-2, 3)\} = \{(x, y) \mid x^r - 3^r = (-2)^r - y^r \Rightarrow x^r + y^r = 1\} \quad (./5)$</p>	۸
<p>$R = \{(x, y) \in R^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\} \quad (./25)$</p> 	۹
<p>الف) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\} \quad (./5)$</p> <p>ب) $A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \quad (./5)$</p> <p>ج) $B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \quad (./5)$</p> <p>د) $B' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\} \quad (./25)$</p> <p>$A \cap B' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\} \quad (./25)$</p>	۱۰
<p>$n(S) = \binom{15}{3} \quad (./25) \quad \text{الف) } P(A) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} \quad (./25) \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} \quad (./5)$</p>	۱۱
<p>$P(2) = P(4) = P(6) = W \quad P(1) = P(3) = P(5) = 5W \quad (./25)$</p> <p>$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \quad (./25)$</p> <p>$5W + W + 5W + W + 5W + W = 1 \quad (./25) \quad 18W = 1 \quad W = \frac{1}{18} \quad (./25)$</p> <p>$P(1) = P(3) = P(5) = 5 \left(\frac{1}{18}\right) = \frac{5}{18} \quad (./25) \quad P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{18} \quad (./25)$</p> <p style="text-align: center;">« ادامه در صفحه سوم »</p>	۱۲

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح

$a(s) = \pi R^2 = \pi(2^2) = 4\pi$ (۰/۵) $a(A) = \pi R^2 = \pi(1^2) = \pi$ (۰/۲۵) $P(A) = \frac{a(A)}{a(s)} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$ (۰/۵)		۱۳
$P(A) = \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}}$ (۰/۵)		۱۴
$A = (A - B) \cup (A \cap B)$ (۰/۲۵) می دانیم $= (A \cap B') \cup (A \cap B)$ (۰/۲۵) از طرفی دو پیشامد $A \cap B$ و $A \cap B'$ از هم جدا هستند. لذا داریم : $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$ (۰/۲۵) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ (۰/۲۵)		۱۵
$P(A') = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ (۰/۲۵) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (۰/۲۵) الف) $\frac{6}{8} = \frac{5}{8} + P(B) - \frac{1}{3}$ (۰/۲۵) $P(B) = \frac{11}{24}$ (۰/۲۵) ب) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ (۰/۲۵) $P(B - A) = \frac{11}{24} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{11-8}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ (۰/۲۵)		۱۶
جمع نمره ۲۰		

همکار محترم ضمن عرض خسته نباشید ، لطفاً راه حل های صحیح دیگر را به تناسب بارم بندی نمایید.