

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۶/۲۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت شهریور ماه سال ۸۳		سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $4^n + 5$ بر ۳ بخش پذیر است. $4^n + 5 = 3r$	۱/۵
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم یک عدد زوج حاصل می شود.	۱
۳	برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:	۱
	$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$	
۴	اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۳ باشد آنگاه نشان دهید که n مضرب ۳ است. (برهان خلف)	۱/۲۵
۵	از ۱۸۵ نفر دانش آموزان یک مدرسه دخترانه حداقل چند نفر دانش آموز در یک روز هفته متولد شده اند؟ چرا؟	۱
۶	الف) مجموعه A را که با گزاره نما نوشته شده با نوشتن اعضا نشان دهید. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 3\}$ (الف) ب) مجموعه B را با استفاده از یک گزاره نما بنویسید. $B = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ (ب)	۱
۷	به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید:	۱/۲۵
	$A - (B \cup C) = (A - B) - C$	
۸	اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$ باشند نمودار حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.	۰/۷۵
۹	نمودار رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x^2\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۰/۷۵
۱۰	رابطه R در \mathbb{R}^2 به صورت رو به رو تعریف شده است:	۱/۵
	$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$	
	الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است.	
	ب) کلاس هم ارزی $[(1, 2)]$ را مشخص کنید.	
۱۱	خانواده ای دارای ۳ فرزند است.	۲
	الف) فضای نمونه ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟	
	ب) پیشامد A که در آن فقط دو فرزند پسر باشد را مشخص کنید.	
	پ) پیشامد B که در آن فقط فرزند اول دختر باشد.	
	ت) پیشامد $A \cup B$.	
	ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۶/۲۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت شهریور ماه سال ۸۳		سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	
۱۲	تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه اعداد $\{1,2,5\}$ را روی کارتهای مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارتها، یک کارت را بطور تصادفی برمی داریم احتمال آن که روی این کارت عدد ۵ باشد چیست؟ (تکرار ارقام مجاز نیست).		
۱۳	مکعبی سالم (همگن) که سه وجه آن قرمز و سه وجه دیگر آن زرد است را ۱۰ بار پرتاب می کنیم، احتمال اینکه ۵ بار وجه روشده مکعب، زرد باشد، چقدر است؟		
۱۴	تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد غیر اول دو برابر احتمال آمدن هر عدد اول است اگر در یک پرتاب این تاس پیشامد $A = \{2,4,5\}$ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید.		
۱۵	دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین ۰ و ۲ به تصادف انتخاب می شوند. مطلوبست احتمال اینکه مجموع این دو عدد بین ۱ و ۳ باشد.		
۱۶	عددی به تصادف از مجموعه $\{1,2,3,\dots,1000\}$ انتخاب می کنیم احتمال اینکه: الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، اما بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟ ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟		
۲۰	جمع نمرات « موفق باشید »		

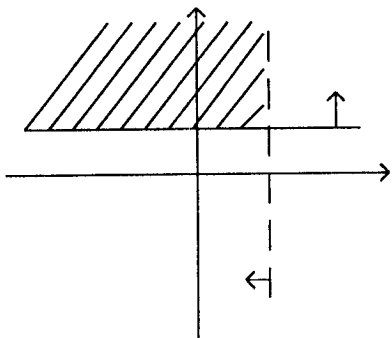
باسمه تعالی

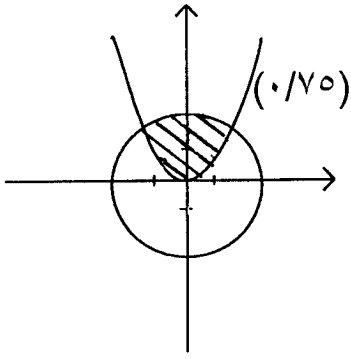
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۶/۲۱
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت شهریور ماه سال ۸۳	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه

ردیف	راهنمای تصحیح
۱	$\begin{cases} P(I): 4^I + 5 = 3r & 9 = 3r & (./25) \\ P(K): 4^K + 5 = 3r & & (./25) \\ P(K+1): 4^{K+1} + 5 = 3r' & & (./25) \end{cases}$ <p>اثبات: طرفین فرض را در عدد ۴ ضرب می کنیم</p> $4(4^K + 5 = 3r) \Rightarrow 4^{K+1} + 20 = 4(3r)$ $4^{K+1} + 5 + 15 = 4(3r) \Rightarrow 4^{K+1} + 5 = 4(3r) - 15$ $4^{K+1} + 5 = 3(4r - 5) \Rightarrow 4^{K+1} + 5 = 3r' \quad (./75)$
۲	$x = 2k+1 \Rightarrow x^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1$ $x^2 - 1 = 4k^2 + 4k \Rightarrow x^2 - 1 = 2(2k^2 + 2k) \Rightarrow x^2 - 1 = 2k' \quad (1)$
۳	$(x-y)^2 \geq 0 \quad (./25) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 \geq 2xy \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{طرفین نا معادله را بر } xy} \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq \frac{2xy}{xy} \quad (./25)$ $\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \geq 2 \quad (./25) \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (./25)$
۴	<p>از برهان خلف استفاده می کنیم و می گوئیم اگر n مضرب ۳ نباشد پس (./25)</p> $n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 \neq 2k' \quad (./5)$ $n = 2k+2 \Rightarrow n^2 = (2k+2)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 8k + 4 \Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 4k + 2) \Rightarrow n^2 \neq 2k' \quad (./5)$ <p>هر دو رابطه اخیر خلاف فرض هستند پس حکم برقرار است.</p>
۵	<p>اگر دانش آموزان را به منزله کیوتو و روزهای هفته را به منزله لانه کیوتو در نظر بگیریم (./25)</p> <p>پس ۷ (۱۸۵) طبق اصل لانه کیوتو (./25)</p> $185 \mid \frac{7}{26} \quad (./25) \quad 26+1=27 \quad (./25)$ <p>پس حداقل ۲۷ دانش آموز در یک روز هفته متولد شده اند.</p>
۶	$A = \{x \in Z \mid -2 < x < 3\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (./5)$ $B = \{x \in R \mid x^2 - 2x - 1 = 0\} \quad (./5)$ <p>ادامه در صفحه دوم</p>

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۶/۲۱	سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)
سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت شهریور ماه سال ۸۳

<p>اول طرف $A - (B \cup C) =$ $A \cap (B \cup C)' \quad (۰/۲۵) =$ $A \cap (B' \cap C') \quad (۰/۲۵) =$ $(A \cap B') \cap C' \quad (۰/۲۵) =$ $(A - B) \cap C' \quad (۰/۲۵) =$ $(A - B) - C \quad (۰/۲۵) =$ طرف دوم</p>	۷
--	---

<p>$A \times B = \{ (x, y) \mid x < 2, y \geq 1 \}$</p>  <p style="text-align: center;">(۰/۷۵)</p>	۸
--	---

 <p style="text-align: center;">(۰/۷۵)</p> $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq x^2 \end{cases}$	۹
--	---

ادامه در صفحه ی سوم

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۶/۲۱
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت شهریور ماه سال ۸۳	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه

$(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2 \quad (۱) \quad (۰/۲۵)$ $\left\{ \begin{array}{l} (a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b) \quad (۰/۲۵) \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow c^2 + d^2 = a^2 + b^2 \quad (۲) \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} (a, b)R(c, d) \text{ و } (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f) \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = e^2 + f^2 \quad (۰/۲۵) \quad (۳) \\ c^2 + d^2 = e^2 + f^2 \end{array} \right.$ از ۱ و ۲ نتیجه می گیریم که R یک رابطه هم ارزی است (۰/۲۵) $[(1,2)] = \{(x, y) \mid (x, y)R(1,2)\} = \{x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2\} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow [(1,2)] = \{x^2 + y^2 = 5\} \quad (۰/۲۵)$	۱۰
--	----

$S = \{(د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د), (د, د)\} \quad (۱)$ $A = \{(د, د), (د, د), (د, د)\} \quad (۰/۵)$ $B = \{(د, د), (د, د)\} \quad (۰/۲۵)$ $A \cup B = \{(د, د), (د, د), (د, د)\} \quad (۰/۲۵)$	۱۱
---	----

$S = \{12, 15, 21, 25, 51, 52\} \quad (۰/۵) \quad n(S) = 6$ $A = \{15, 25, 51, 52\} \quad (۰/۵) \quad n(A) = 4$ $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad (۰/۵)$	۱۲
--	----

$S = \{\text{رنگ وجه مکعب قرمز و رنگ وجه مکعب زرد}\}$ $p(\text{رنگ وجه مکعب قرمز}) = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵) \quad p(\text{رنگ وجه مکعب زرد}) = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$ $p(5 \text{ بار مشاهده رنگ زرد}) = \frac{\binom{10}{5}}{3^{10}} \quad (۰/۵)$	۱۳
---	----

$P(۲) = P(۳) = P(۵) = W \quad P(۱) = P(۴) = P(۶) = 2W \quad (۰/۲۵)$ $P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = 1 \quad (۰/۲۵)$ $2W + W + W + 2W + W + 2W = 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 9W = 1 \Rightarrow W = \frac{1}{9} \quad (۰/۲۵)$ $P(۲) = P(۳) = P(۵) = \frac{1}{9} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow P(A) = P(۲) + P(۴) + P(۵) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \quad (۰/۲۵)$	۱۴
--	----

ادامه در صفحه چهارم

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۶/۲۱	سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)
سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت شهریور ماه سال ۸۳

$S = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ $a(s) = 2 \times 2 = 4 \quad (0/25)$ $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ x+y \leq 3 \end{cases}$ $a(A) = 4 - \left(\frac{1 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} \right) = 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (0/25)$ $a(A) = 3 \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{a(A)}{a(s)} = \frac{3}{4} \quad (0/25)$	<p>(0/25)</p>	۱۵
--	---------------	----

<p>الف) $n(A) = \binom{1000}{3} = 333 \rightarrow P(A) = \frac{333}{1000} \quad (0/25)$</p> <p>$n(B) = \binom{1000}{5} = 200 \rightarrow P(B) = \frac{200}{1000} \quad (0/25)$</p> <p>$n(A \cap B) = \binom{1000}{15} = 66 \rightarrow P(A \cap B) = \frac{66}{1000} \quad (0/25)$</p> <p>$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow{(0/25)} P(A \cap B') = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000} \quad (0/25)$</p> <p>ب) $P(A \cup B) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000} \quad (0/25)$</p> <p>$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{467}{1000} = \frac{533}{1000} \quad (0/25)$</p>	۱۶
---	----

<p>مصصحین محترم با عرض سلام و خسته نباشید</p> <p>لطفاً برای پاسخهای درست دیگر، بارم را به تناسب تقسیم فرمائید.</p> <p>با تشکر</p>	
---	--