

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۳/۲۱	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت خرداد ماه سال ۸۳		سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \quad (n > 1, n \in \mathbb{N})$	۱/۵
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب ۳ است.	۱
۳	برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1)$	۱
۴	می دانیم $\sqrt{2}$ گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{2} + 1}$ نیز گنگ است. (برهان خلف)	۱
۵	۵ نقطه داخل دایره ای به شعاع R مفروض است. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $R\sqrt{2}$ است.	۱
۶	به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید: الف) $[A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$ ب) $B \subset A \Rightarrow A' \subset B'$	۲/۲۵
۷	نمودار رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x \}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۰/۷۵
۸	اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 2\}$ باشند: الف) حاصلضرب های $A \times B$ و A^2 را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) حاصل عبارت $A^2 - A \times B$ را با اعضاء مشخص کرده و نمودار آن را رسم کنید.	۱/۵
۹	رابطه R در \mathbb{R}^2 به صورت روبه رو تعریف شده است. $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a - c = \sqrt{ d - b }$ الف) نشان دهید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-3, 4)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
۱۰	سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم، اگر پشت بیاید آنگاه تاس را می ریزیم و اگر رو بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می کنیم. مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه ای این تجربه ای تصادفی. ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید عناصر این پیشامد را بنویسید. پ) اگر B پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو بار سکه به رو بیاید عناصر این پیشامد را بنویسید. ت) پیشامد $A' \cup B$.	۱/۷۵

ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی و فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۳/۲۱		سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	
سازمان آموزش و پرورش شهر تهران		دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت خرداد ماه سال ۸۳	
کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه			
۰/۷۵	۱۱ ۱۵ نفر را در نظر می گیریم. احتمال اینکه روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز نباشد را مشخص کنید. (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید).		
۱/۲۵	۱۲ اگر یک عدد ۴ رقمی کمتر از ۶۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ به وجود آید، احتمال اینکه عدد ساخته شده زوج باشد را پیدا کنید. (تکرار ارقام مجاز نیست.)		
۰/۷۵	۱۳ سکه‌ی سالمی را ۷ بار پرتاب می کنیم، احتمال اینکه حداقل ۶ بار رو بیاید، را محاسبه کنید.		
۰/۷۵	۱۴ اگر فضای نمونه ای و $p(\{a_1, a_2\}) = \frac{3}{5}$ و $P(a_3) = m + \frac{1}{3}$ باشد، مقدار m را تعیین کنید.		
۱/۲۵	۱۵ یک نقطه (x, y) را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رئوسهای $(0,0), (4,0), (3,2)$ انتخاب می کنیم. احتمال آنکه (x, y) درون یک مستطیل به رئوسهای $(1,0), (1,2), (2,2), (2,0)$ قرار داشته باشد، را تعیین کنید.		
۱	۱۶ اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ ، ثابت کنید. $P(B - A) = P(B) - P(A)$		
۱	۱۷ اگر $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B') = \frac{5}{8}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ باشند، مطلوبست محاسبه: الف) $P(A \cap B)$ ب) $P(B \cap A')$		
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»		

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۳/۲۱	سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)
سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت خرداد ماه سال ۸۳

راهنمای تصحیح

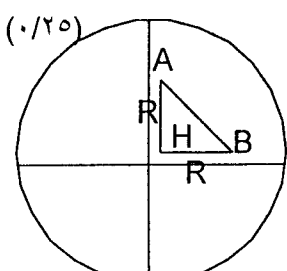
ردیف	راه‌نمای تصحیح
۱	$P(2): 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (0/25)$ $P(K): (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{K}) = \frac{1}{K} \quad (0/25)$ <p>حکم استقرا $P(K+1): (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{K})(1 - \frac{1}{K+1}) = \frac{1}{K+1} \quad (0/25)$</p> <p>طرف چپ حکم $\frac{1}{K}(1 - \frac{1}{K+1}) \quad (0/25) = \frac{1}{K} - \frac{1}{K(K+1)} = \frac{K+1-1}{K(K+1)} = \frac{K}{K(K+1)} \quad (0/25)$</p> $\frac{K}{K(K+1)} = \frac{1}{K+1} \quad (0/25)$

۲	$x = 2k \quad (0/25) \quad y = 2k + 2 \quad (0/25) \quad z = 2k + 4 \quad (0/25)$ $x + y + z = (2k) + (2k + 2) + (2k + 4) = 6k + 6$ $x + y + z = 3(2k + 2) = 3k' \quad (0/25)$
---	--

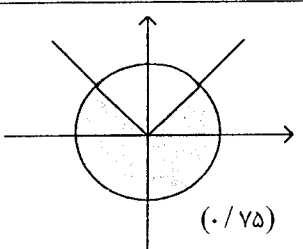
۳	$(x-y)^2 + (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad (0/25)$ $(0/25)$ $\Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2xy - 2x^2 + 2x \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1) \quad (0/25)$ $(0/25)$
---	--

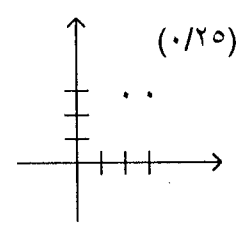
۴	$\sqrt{\sqrt{2}+1} = \frac{a}{b} \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{cases} \quad (0/25)$ $\sqrt{2} + 1 = \frac{a^2}{b^2} \quad (0/25) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (0/25)$ $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{تناقض} \quad (0/25)$ <p style="text-align: center;">ادامه در صفحه‌ی دوم</p>
---	---

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۳/۲۱	سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)
سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران در نوبت خرداد ماه سال ۸۳

<p>۵ دو قطر دایره را طوری رسم می کنیم که دایره به چهار ربع مساوی تقسیم شود (۰/۲۵) و ۵ نقطه را به منزله کبوتر ۴ ربع دایره را به منزله لانه کبوتر در نظر می گیریم پس ۴ (طبق اصل لانه کبوتر ۴ کبوتر اول در ۴ لانه قرار می گیرند در اینصورت کبوتر پنجم باید در یکی از این لانه ها قرار بگیرد پس در یک ربع دایره حداقل ۲ نقطه قرار می گیرد. (۰/۲۵)</p> $(AB)^2 = (AH)^2 + (HB)^2$ $(AB)^2 < R^2 + R^2 \Rightarrow (AB)^2 < 2R^2 \Rightarrow AB < R\sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$ <div style="text-align: right;">  <p>(۰/۲۵)</p> </div> <p>پس حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه از $R\sqrt{2}$ کمتر است.</p>	۵
---	---

<p>الف) $(A \cap A') \cup (A \cap B) \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B')] = (۰/۲۵)$ $[(\phi) \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup (\phi)] = (A \cap B) \cup (B \cap A') (۰/۲۵)$ $B \cap (A \cup A') (۰/۲۵) = B \cap U = B (۰/۲۵)$ طرف دوم ب) $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A (۰/۲۵) \Rightarrow (A \cup B)' = A' (۰/۲۵) \Rightarrow A' \cap B' = A' (۰/۲۵) \Rightarrow A' \subset B' (۰/۲۵)$</p>	۶
---	---

<div style="text-align: center;">  <p>(۰/۷۵)</p> </div>	۷
---	---

<p>$A = \{۲, ۳\} (۰/۲۵) \quad B = \{۱, ۲\} (۰/۲۵)$ $A^2 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in A\}$ $A^2 = A \times A = \{(۲, ۲), (۲, ۳), (۳, ۲), (۳, ۳)\} (۰/۲۵)$ $A \times B = \{(۲, ۱), (۲, ۲), (۳, ۱), (۳, ۲)\} (۰/۲۵)$ $A^2 - A \times B = \{(۲, ۳), (۳, ۳)\} (۰/۲۵)$</p>	<div style="text-align: center;">  <p>(۰/۲۵)</p> </div>	۸
---	--	---

ادامه در صفحه سوم

رشته: ریاضی و فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۳/۲۱	سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)
سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه	دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت خرداد ماه سال ۸۳

$\{(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a - a = \sqrt{ b - b } \quad \cdot = \cdot \quad \textcircled{1} \quad (۰/۲۵)$ $\{(a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)$ $\{ a - c = \sqrt{ d - b } \Rightarrow c - a = \sqrt{ b - d } \quad \textcircled{2} \quad (۰/۲۵)$ $\{(a, b)R(c, d) \text{ و } (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f)$ $\left\{ \begin{array}{l} a - c = \sqrt{ d - b } \\ c - e = \sqrt{ f - d } \end{array} \Rightarrow a - e = \sqrt{ f - b } \quad \textcircled{3} \quad (۰/۲۵)$ <p>از $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ و $\textcircled{3}$ نتیجه می گیریم R یک رابطه هم ارزی است (۰/۲۵)</p> $[(-۳, ۴)] = \{(x, y) (x, y)R(-۳, ۴)\} = \{(x, y) x - -۳ = \sqrt{ ۴ - y }\} = \{(x, y) x + \sqrt{ y } = ۳\} \quad (۰/۵)$	۹
<p>الف: $S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, ر, ر), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, پ)\} \quad (۰/۷۵)$</p> <p>ب: $A = \{(پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ)\} \quad (۰/۲۵)$</p> <p>ب: $B = \{(ر, پ, ر), (ر, ر, پ)\} \quad (۰/۲۵)$</p> <p>ت: $A' = \{(ر, ر, ر), (ر, پ, پ)\} \quad (۰/۲۵)$</p> <p>$A' \cup B = \{(ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر), (ر, پ, پ)\} \quad (۰/۲۵)$</p>	۱۰
$n(A) = ۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - ۱۵ + ۱) \quad (۰/۲۵)$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \dots \times (۳۶۵ - ۱۵ + ۱)}{۳۶۵^{۱۵}} \quad (۰/۵)$	۱۱
$n(s) = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲ \quad (۰/۵)$ $n(A) = ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲ \quad (۰/۵)$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۷۲} = \frac{۱}{۶} \quad (۰/۲۵)$	۱۲
$p(k \geq ۶) = p(k = ۶) + p(k = ۷) = \frac{\binom{۷}{۶} + \binom{۷}{۷}}{۲^۷} = \frac{۸}{۲^۷} = \frac{۱}{۱۶} \quad (۰/۵)$ <p>(۰/۲۵)</p> <p style="text-align: center;">ادامه در صفحه چهارم</p>	۱۳

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۳/۰۳/۲۱
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهران درنوبت خرداد ماه سال ۸۳	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران کارشناسی سنجش و ارزشیابی تحصیلی متوسطه

$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = 1 \quad (./25)$ $P(a_1) + P(a_2) = \frac{3}{5} \quad (./25)$ $\frac{3}{5} + m + \frac{1}{3} = 1 \rightarrow m = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \quad (./25)$	۱۴
--	----

$a_S = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \quad (./25)$ $a_A = \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)(1)}{2} = 1 \quad (./5)$ $P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{1}{4} \quad (./25)$	<p> $y = \frac{2}{4}x$ $x = 1 \rightarrow y = \frac{2}{4}$ $x = 2 \rightarrow y = \frac{2}{4}(2) = \frac{4}{4}$ </p>	۱۵
---	---	----

$A \subseteq B$ $(B - A) \cup A = B \rightarrow (B - A) \cap A = \phi$ $\rightarrow P(B) = P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A) \rightarrow$ $P(B - A) = P(B) - P(A)$	۱۶
--	----

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (./25)$ $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{8} - P(A \cap B)$ $\text{الف) } P(A \cap B) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{4 + 8 - 5 - 6}{8} = \frac{1}{8} \quad (./25)$ $\text{ب) } P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \quad (./25) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (./25)$	۱۷
--	----

همکاران محترم مصحح با عرض سلام و خسته نباشید

لطفاً برای پاسخ های درست دیگر، بارم را به تناسب تقسیم فرمائید.